Teoria Miary i Całki

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

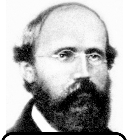
Wykład 1

Wstęp i σ-algebra zbiorów

Literatura

- "Pandemiczne notatki z wykładu"
  math.uwb.edu.pl/∼zaf/kwasniewski/teaching
- G. Plebanek "‘Miara i całka"’ skrypt

- S. Łojasiewicz, Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych, PWN, 1987
- A. Birkholc, Analiza matematyczna. Funkcje wielu zmiennych, PWN 1986
- W. Rudin, Analiza rzeczywista i zespolona, PWN, Warszawa, 2009.



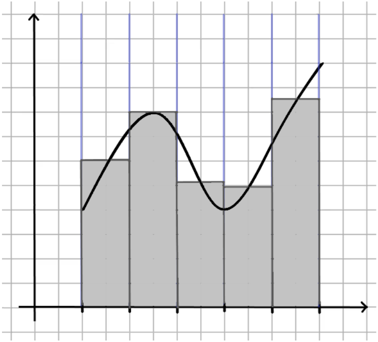
Riemann

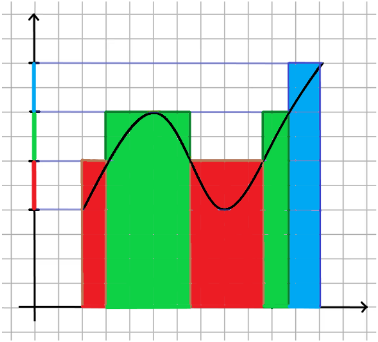
= ??

Lebesgue

= 11

Każdy porządny kasjer liczy w ten drugi sposób

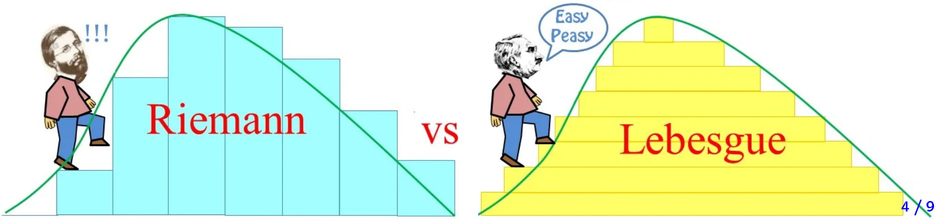




Przewagi Całki Lebesgue'a nad Riemanna

- Większa klasa funkcji całkowalnych
- Możliwość całkowania względem ogólnych miar
- Twierdzenia o przechodzeniu z granicą pod całkę

Analiza Matematyczna | Rachunek Prawdopodobieństwa | Analiza Harmoniczna | Analiza Funkcjonalna



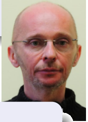
σ-algebry zbiorów

X - zbiór, 2^X - rodzina wszystkich podzbiorów X (zbiór potęgowy)

Def. σ-**algebrą** na X nazywamy rodzinę $\mathcal{F}$ podzbiorów X taką, że

- Σ1 $X \in \mathcal{F}$ (*zawiera całą przestrzeń*)
- Σ2 $A \in \mathcal{F} \implies A' := X \setminus A \in \mathcal{F}$ (*zamknięta na dopełnienia*)
- Σ3 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ (*zamknięta na sumy ciągów*)

Parę $(X, \mathcal{F})$ nazywamy **przestrzenią mierzalną**. Elementy σ-algebry $\mathcal{F}$ nazywamy **zbiorami mierzalnymi**.



Na probabilistyce σ-**ciało** = σ-**algebra**, zdarzenie = zbiór mierzalny

Uw. σ-**algebra** zawsze zawiera $\emptyset$, X, jest zamknięta na skończone operacje teoriomnogościowe oraz **przeliczalne sumy i przekroje**.

Zbiór A jest **przeliczalny** $\iff$ A jest skończony lub równoliczny z $\mathbb{N}$ (czyli $|A| \leqslant |\mathbb{N}| =: \aleph_0$)

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ - przeliczalne; $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, 2^X nieprzeliczalne (X nieskończ.)

Stw. Jeśli $\mathcal{F}$ jest σ-algebrą, to

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$ (*zawiera zbiór pusty*)
2. $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$ (*zamknięta na skończone sumy*)
3. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F} \implies \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ (*zamknięta na przekroje ciągów*)
4. $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$ (*zamknięta na skończone przekroje*)

Dowód: (i) $X \in \mathcal{F}$ z $(\Sigma 1)$. Zatem $\emptyset = X \setminus X = X' \in \mathcal{F}$ z $(\Sigma 2)$.

(ii) Jeśli $A, B \in \mathcal{F}$, to kładąc $A_{2k-1} := A$ oraz $A_{2k} = B$ dla $k \in \mathbb{N}$, mamy $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ i stąd $A \cup B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ na mocy $(\Sigma 3)$.

(iii) Niech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$. Z praw De Morgana otrzymujemy

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n')' = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n')' \in \mathcal{F}$$

na mocy $(\Sigma 2)$ i $(\Sigma 3)$.

(iv) Można naśladować dowód (ii) lub (iii)

5. $\mathcal{F}$ zamknięta na różnice, gdyż $A \setminus B = A \cap B'$ patrz (iv) i $(\Sigma 2)$

Przykłady

1. 2^X jest σ-algebrą (*największa σ-algebra na X*)
2. $\{\emptyset, X\}$ jest σ-algebrą (*najmniejsza σ-algebra na X*)
3. $\{\emptyset, A, X\}$ nie jest σ-algebrą (o ile $A \neq \emptyset, X$)
4. $\{\emptyset, A, A', X\}$ jest σ-algebrą (*generowaną przez A*)
5. Jeśli $\mathcal{F}$ jest σ-algebrą na X oraz $E \subseteq X$, to
   $$\mathcal{F}_E := \{E \cap A : A \in \mathcal{F}\} \qquad (\textit{obcięcie } \mathcal{F} \textit{ do } E)$$
   jest σ-algebrą na E
6. Jeśli $\mathcal{F}$ jest σ-algebrą na Y, to dla dowolnej funkcji $f : X \to Y$
   $$f^{-1}(\mathcal{F}) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}\} \quad (\textit{przeciwobraz } \mathcal{F})$$
   jest σ-algebrą na X
7. Obraz σ-algebry zazwyczaj nie jest σ-algebrą
8. Suma dwóch σ-algebr nie musi być σ-algebrą
9. **Przecięcie dowolnej ilości σ-algebr jest σ-algebrą!**

Stw. Dla każdej rodziny $\mathcal{G}$ podzbiorów zbioru X istnieje najmniejsza σ-algebra $\sigma(\mathcal{G})$ na X zawierająca $\mathcal{G}$.

Dowód: Rozważmy następujące przecięcie

$$\sigma(\mathcal{G}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F} \text{ i } \mathcal{F} \text{ jest} \\ \sigma\text{-algebrą na } X}} \mathcal{F}$$

1. $\sigma(\mathcal{G})$ jest σ-algebrą (bo jest przecięciem σ-algebr)
2. $\sigma(\mathcal{G})$ zawiera $\mathcal{G}$ (bo każda przecinana rodzina zawiera $\mathcal{G}$)
3. $\sigma(\mathcal{G})$ zawiera się w każdej σ-algebrze $\mathcal{F}$ zawierającej $\mathcal{G}$ (bo jest przekrojem takich σ-algebr),

czyli $\sigma(\mathcal{G})$ jest najmniejszą rodziną o własnościach (1), (2). ■

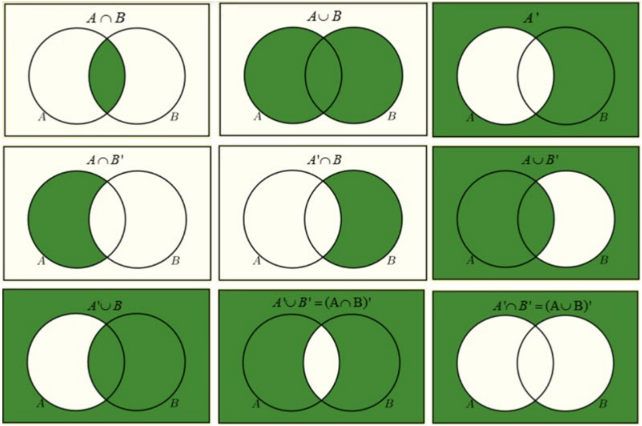
Def. $\sigma(\mathcal{G})$ nazywamy σ-**algebrą generowaną** przez $\mathcal{G}$.

Prz. Jeśli $A \subseteq X$, to $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, X, A, A'\}$.

Ogólnie $|\mathcal{G}| = n \implies |\sigma(\mathcal{G})| \leqslant 2^n$

Uw. Niech $\mathcal{H}$ oraz $\mathcal{G}$ rodziny podzbiorów zbioru X.

1. $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{G}) \iff \mathcal{G}$ jest σ-algebrą
2. $\sigma(\sigma(\mathcal{G})) = \sigma(\mathcal{G})$
3. $\sigma(\mathcal{H}) \subseteq \sigma(\mathcal{G}) \iff \mathcal{H} \subseteq \sigma(\mathcal{G})$
4. $\sigma(\mathcal{H}) = \sigma(\mathcal{G}) \iff \mathcal{H} \subseteq \sigma(\mathcal{G})$ oraz $\mathcal{G} \subseteq \sigma(\mathcal{H})$



$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$